Problemas de olimpiada: Geometría.

1. (Fase Local, 2005) Sea M un punto interior del segmento AB. Se construyen cuadrados $AMCD$ y $BEHM$ en el mismo lado de AB. Si N es el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas a dichos cuadrados, probar que:

   (a) Los puntos B, N y C están alineados.

   (b) El punto H es el ortocentro del triángulo ABC.

2. (Fase Local, 2005) Se considera un triángulo ABC con $\angle BAC = 45^{\circ}$ y $\angle ACB = 30^{\circ}$.

   Si M es el punto medio del lado BC, se pide demostrar que $\angle AMB = 45^{\circ}$ y que $BC \cdot AC = 2$.

3. (Fase Local, 2006) En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC.

4. (Fase Local, 2006) Los vértices del cuadrilátero convexo $ABCD$ están situados en una circunferencia. Sus diagonales AC y BD se cortan en el punto E. Sea O_1 el centro del círculo inscrito en el triángulo ABC, y O_2 el centro del círculo inscrito en el triángulo ABD. La recta O_1O_2 corta a EB en M y a EA en N.

   Demostrar que el triángulo EMN es isósceles.

5. (OME, 2011) Dos semirrectas tienen su común origen en el punto O. Se considera una circunferencia C_1 tangente a ambas semirrectas, cuyo centro está situado a distancia d_1 de O, y cuyo radio es r_1. Se construyen sucesivamente las circunferencias C_n, de modo que C_n es tangente a las semirrectas, tangente exterior a C_{n-1} y tal que la distancia de su centro a O, d_n, es menor que d_{n-1}, para $n > 1$. Halla la suma de las áreas de los círculos limitados por las circunferencias C_n, para todo n, en función de r_1 y d_1.

6. (OME, 2014) Sean B y C dos puntos fijos de una circunferencia de centro O, que no sean diametralmente opuestos. Sea A un punto variable sobre la circunferencia, distinto de B y C, y que no pertenece a la mediatriz de BC. Sean H, el ortocentro del triángulo ABC; y M y N los puntos medios de los segmentos BC y AH, respectivamente. La recta AM corta de nuevo a la circunferencia en D, y, finalmente, NM y OD se cortan en un punto P.

   Determinar el lugar geométrico del punto P cuando A recorre la circunferencia

7. (OME, 2016) Dos circunferencias C y C' son secantes en dos puntos P y Q. La recta que une los centros corta a C en R y a C' en R', la que une P y R' corta a C en $X \neq P$ y la que une P y R corta a C' en $X' \neq P$. Si los tres puntos X, Q, X' están alineados se pide:

   i. Hallar el ángulo $\angle XPX'$.

   ii. Demostrar que $(d + r - r')(d - r + r') = rr'$, donde d es la distancia entre los centros de las circunferencias y r y r' sus radios.

8. (USAMO, 1988) Triangle ABC has incenter I. Consider the triangle whose vertices are the circumcenters of IAB, IBC, ICA. Show that its circumcenter coincides with the circumcenter of ABC.

9. (CGMO, 2012) The incircle of a triangle ABC is tangent to sides AB and AC at D and E respectively, and O is the circumcenter of triangle BCI. Prove that $\angle ODB = \angle OEC$.

10. (IMO, 2004) Let ABC be an acute-angled triangle with $AB \neq AC$. The circle with diameter BC intersects the sides AB and AC at M and N respectively. Denote by O the midpoint of the side BC. The bisectors of the angles $\angle BAC$ and $\angle MON$ intersect at R. Prove that the circumcircles of the triangles BMR and CNR have a common point lying on the side BC.

11. (IMO, 2006) Let ABC be triangle with incenter I. A point P in the interior of the triangle satisfies $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Show that $AP \geq AI$, and that equality holds if and only if $P = I$.

12. (IMO, 2008) An acute-angled triangle ABC has orthocentre H. The circle passing through H with centre the midpoint of BC intersects the line BC at A_1 and A_2. Similarly, the circle passing through H with centre the midpoint of CA intersects the line CA at B_1 and B_2, and the circle passing through H with centre the midpoint of AB intersects the line AB at C_1 and C_2. Show that A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 lie on a circle.